**1.** Για την εξίσωση $(1-x^2)y''(x) - xy'(x) + m^2y(x) = 0, x \in (-1,1), m \in \mathbb{N}$: i) Να αποδειχθεί ότι έχει μια πολυωνυμική λύση $T_m(x)$ και να βρεθούν τα $T_1(x), (T_2(x)$. ii) Να αποδειχθεί ότι η ακολουθία $(T_m(x))_{m\geq 1}$ είναι ορθογώνια ως προς μια συνάρτηση βάρους στο $[-1,1]$. **Υπόδ.** i) Το σημείο $x_0 = 0$ είναι ομαλό. Για την δυναμοσειρά-λύση βρίσκουμε $c_{n+2} = -\frac{m^2-n^2}{(n+2)(n+1)}c_n, n = 0,1,...$ από όπου έπεται ότι $c_{m+2} = 0$ και (...) $c_{m+2k} = 0, k \geq 1$, συνεπώς .... (Δες σελ. 276 - Δεν απαιτείται περαιτέρω εύρεση αναλυτικών εκφράσεων.) Για $m = 1,2$ προκύπτει $T_1(x) = 1, T_2(x) = 1-2x^2$. ii) Για $m \in \mathbb{N}$ είναι $[(1-x^2)^{1/2}T'_m(x)]' + m^2(1-x^2)^{-1/2}T_m(x) = 0$. Για $m \neq n$ με ολοκλήρωση κ. π. είναι $\int_{-1}^{1}[(1-x^2)^{1/2}T'_m(x)]'T_n dx - \int_{-1}^{1}[(1-x^2)^{1/2}T'_n(x)]'T_m dx = ...$ από όπου προκύπτει ... $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-1/2}T_m(x)T_n(x)dx = 0$.

**2.** i) Να επιλυθεί η εξίσωση $y'' + 7y' + 10y = f, t \geq 0, f \in C([0,\infty))$ ii) Να αποδειχθεί ότι: α) για $f(t) = \frac{2t+1}{3t+2t^{1/2}+1}$, οι λύσεις της (Ε) είναι φραγμένες. β) για $f(t) = \frac{2t+1}{3t^2+2t^{1/2}+1}$, οι λύσεις της (Ε) τείνουν προς το μηδέν στο $+\infty$. **Υπόδ.** i) Ένα βασικό σύνολο της ομογενούς είναι το $\{y_1(x) = e^{-2t}, y_2(t) = e^{-5t}\}$ και μια μερική λύση της είναι η $y_\mu(x) = y_1(t)\int_0^t e^{2s}f(s)ds + y_2(t)\int_0^t e^{5s}f(s)ds$. ii) Οι $y_1, y_2$ τείνουν προς το μηδέν στο $+\infty$. α) Η $f$ είναι φράγμένη και $|e^{-2t}\int_0^t e^{2s}f(s)ds| \leq M_f e^{-2t}\int_0^t e^{2s}|f(s)|ds = M_f e^{-2t}\frac{e^{2t}-1}{2} \frac{\leq M_f}{2}, t \geq 0$. β) Αρκεί να αποδειχθεί ότι η $y_\mu$ τείνει προς το μηδέν στο στο $+\infty$. Παρατηρήστε ότι $e^{2t}f(t) \to +\infty$, συνεπώς (...) $\int_0^t e^{2s}f(s)ds \to +\infty$, και το όριο της $y_\mu$ προκύπτει με εφαρμογή γνωστού κανόνα.

**3.** (i) Με την βοήθεια του μετασχηματισμού $u = y\sqrt{x}$ να επιλυθεί η γραμμική διαφορική εξίσωση $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = f(x), x > 0$ με $f$ συνεχή. ii) Να αποδειχθεί ότι το πρόβλημα αρχικών τιμών $y' = (xy)^{2/3}, \quad y(1) = c$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις για $c = 0$. Πόσες λύσεις υπάρχουν αν $c = 1$; Διατυπώστε την πρόταση που χρησιμοποιήσατε και εξηγείστε την έλλειψη μονοσημάντου όταν $c = 0$ σε σχέση με την πρόταση που διατυπώθηκε. **Υπόδ.** (i) Με χρήση του μετ/μου η εξίσωση ανάγεται στην (μη ομογενή) εξίσωση με σταθ. συντελεστές $u'' + u = x^{-3/2}f(x)$ της οποίας μια λύση μπορεί να περιγραφεί από τον τύπο του Θεωρ. 15, σελ.89 αφού προσδιοριστεί ένα βασικό σύνολο λύσεων της ομεγενούς. ii) Για $c = 0$ μια λύση είναι η μηδενική ενώ μια άλλη (μη μηδενική) λύση προκύπτει με άμεση ολοκλήρωση της $y^{-2/3}dy = x^{2/3}dx$. Για $c = 1$ υπάρχει ακριβώς μία λύση: παρατηρείστε ότι η $\partial(xy)^{2/3}/\partial y$ είναι φραγμένη στο σύνολο $\{|x-1| \leq 1, |y-1| \leq 1/2\}$ και εφαρμόστε το Θεώρημα 1. Η $f$ δεν είναι Lipshcitz κοντά στο $0$.

**4.** i) Αν είναι γνωστό ότι η εξίσωση $(2x^2+2y^2+x)dx + (x^2+y^2+y)dy = 0$ έχει έναν ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $\phi(x^2+y^2)$ με $\phi \in C^1(0,\infty)$, να αποδειχθεί ότι η $\phi$ ικανοποιεί μια δ.ε. πρώτης τάξης και, στη συνέχεια, να προσδιοριστεί ένας ολοκληρωτικός παράγοντας της εξίσωσης. ii) Με χρήση του ολοκληρωτικού παράγοντα να επιλυθεί η δ.ε. iiia) Να εξεταστεί αν υπάρχει λύση $y_0$ της εξίσωσης με $lim_{x\to+\infty}y_0(x) = 2020$. iiib) Να εξεταστεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο το π.α.τ. που αποτελείται από την εξίσωση και την αρχική τιμή $y(1) = 0$. **Υπόδ.** i) Μετά από πράξεις προκύπτει ότι $\phi'(v) = -\phi(v)v$. ii) Οι λύσεις ικανοποιούν την σχέση $2x + y + \frac{1}{2}log(x^2+y^2) = C$ (Ασκ. Α-1, σελ. 1, Φυλ. λυμ. ασκήσεων). iiia) Παρατηρείστε ότι τα π.ο. των τελικά θετικών λύσεων είναι φραγμένα προς τα δεξιά. iiib) Η εξίσωση γράφεται $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x^2+2y^2+x}{x^2+y^2+y} := f(x,y)$ (Θεώρημα 1).

**5.** Θεωρούμε την εξίσωση $y'(x) + ky(x) = f'(x) + mf(x), (k > 0)$. i) Αν $k = m$ να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της εξίσωσης τείνουν ασυμπτωτικά πρός την $f$ για $x \to +\infty$. Στη συνέχεια να προσδιοριστεί μια συνάρτηση $g$ έτσι ώστε οι λύσεις της εξίσωσης $y'(x) + 5y(x) = g(x)$, να τείνουν ασυμπτωτικά προς την συνάρτηση $2x^2 + 5x - 6$ για $x \to +\infty$. ii) Αν $m = k + 1$ και $lim_{x \to +\infty} f(x) = 2020$, να εξετασθεί αν υπάρχει το $lim_{x \to +\infty} y(x)$. iii) Να εξετασθεί η αλήθεια της πρότασης: Αν για μια ομογενή γ.δ.ε. $n-$ τάξης $(E_0)$ υπάρχει βασικό σύνολο λύσεων του οποίου η ορίζουσα Wronski είναι σταθερή στο διάστημα $I$, τότε η ορίζουσα Wronski οποιουδήποτε συνόλου λύσεων της εξίσωσης είναι επίσης σταθερή στο $I$. Αλλάζει η απάντησή σας αν από την υπόθεση παραλειφθεί η λέξη ¨βασικό¨; **Υπόδ.** i) Για $z(t) = y(t) - f(t)$ είναι $z'(t) + mz(t) = 0$ από όπου $lim_{x \to +\infty}[y(t) - f(t)] = lim_{x \to +\infty} ce^{-mt} = 0$. (προσοχή: το $lim_{x \to +\infty} f(x)$ δεν είναι γνωστό αν υπάρχει) Για την $g$ αρκεί να παρθεί $g = f' + 5f$ (...).. ii) Ολοκληρώστε την $z'(t) + kz(t) = f(t)$ στο $[x_0, x]$ με $x_0 : f(x) \geq 1, x \geq x_0$. (επειδή $lim_{x \to +\infty} = 2020 > 1$) και υπολογίστε το $lim_{x \to +\infty} e^{-kx} \int_{x_0}^{x} f(t)e^{kt} dt$. iii) Αληθής (χρήση του Θ. Liouville). Η πρόταση δεν ευσταθεί αν παραλειφθεί η λέξη ¨βασικό¨: οι ορίζουσες Wronski γραμμικά εξαρτημένων λύσεων είναι σταθερές συναρτήσεις (0) χωρίς αυτό να συνεπάγεται ότι και οι οι ορίζουσες Wronski γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων είναι σταθερές.

**6.** i) Να λυθεί το π.α.τ. $2y'(t) = [y(t) - 1]y''(t), \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -1$. ii) Αν $y_1(x), y_2(x), x \in \mathbb{R}$ είναι ένα βασικό σύνολο λύσεων μιας ομογενούς γ.δ.ε. δεύτερης τάξης, να αποδειχθεί ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της $y_1$ υπάρχει το πολύ μια ρίζα της $y_2$. iii) Να αναχθεί η εξίσωση $y'(x) = -\frac{2x+3y-8}{3x+4y-11}$ σε μια γ.δ.ε. πρώτης τάξης. Να υποδειχθεί ένας τρόπος επίλυσης της εξίσωσης διαφορετικός από την αναγωγή. iv) Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις του π.α.τ. $y'(t) = y(t)[6 - 2y(t)], \quad y(0) = 1$, τείνουν προς το 3 για $t \to +\infty$. **Υπόδ.** i) Όπως το Παρ. 1, σελ. 50. Ολοκληρώστε στο $[1, x]$. Η λύση προκύπτει με ολοκληρωτικό τύπο (δεν απαιτείται ο υπολογισμός του ολοκληρώματος). ii) Αν $x_1, x_2$ δύο διαδοχικές ρίζες της $y_1$ και υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο ρίζες $x_3, x_4$ της $y_2$ με $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$, τότε έπεται (...) ότι υπάρχει $\xi \in (x_3, x_4)$ με ... $W(\xi) = 0$, άτοπο (...) [Δεν απαιτείται η απόδειξη της ύπαρξης.] iii) Για $x = X + 1, y = Y + 2, z = Y/X$ η εξίσωση ανάγεται στην $\frac{3+4z}{1+3z+2z^2} z' = -\frac{2}{X}$ που είναι χωριζομένων μεταβλητών. Για την αναγωγή σε πρώτης τάξης θέτουμε $u = log(1 + 3z + 2z^2)$. Επίσης, γράφεται ως $(2x + 3y - 8)dx + (3x + 4y - 11)dy = 0$ που είναι πλήρης. iv) Παραδ. Α-9, σελ. 6-7, Φυλλ. λυμ. ασκήσεων.

**Τα γραπτά θα είναι στην διάθεση των ενδιαφερομένων την Τετάρτη 4/3/2020, 12-2μ.μ. στο γραφείο 503δ.**